Лисы, Кролики, Мыши, Совы и Охотники

Ради предметного знакомства с особенностями Боровской пары **степень истинности-степень ясности** предлагаю вместе со мной попробовать промоделировать события в довольно сложной экологической системе. Это обширный лес с полянами, где растет трава, где резвятся кролики. Будем называть их Rabbits (по-русски это зайцы, но пример привязан к канадским данным), а их популяцию в тысячах обозначать переменной R. Площадь, занятую травой, будем измерять в процентах от общей площади леса, и обозначать переменной G (Grass). Учтем, что кроликам не дают умереть в своих постельках Лисы, популяцию которых в тысячах будем обозначать переменной F (Foxes). Лисам тоже не грозит умирать от старости. В этих угодьях планово работают охотники, добывающие на продажу лисьи шкуры. Численность охотников мы не будем учитывать явно, а сведем их деятельность к высокой вероятности смерти лисицы в результате случайо-плановой встречи с охотником.

Мы хотим промоделировать поведение этой экосистемы и прогнозировать динамику популяций действующих лиц R и F. Но для начала познакомимся с реальной действительностью на примере данных меховой компании из Канады. Там, правда, отслеживали популяции рысей и зайцев, но нам пока важна не конкретика, а общая качественная картина поведения такой экосистемы в течение длительного времени. А это почти 100 лет.

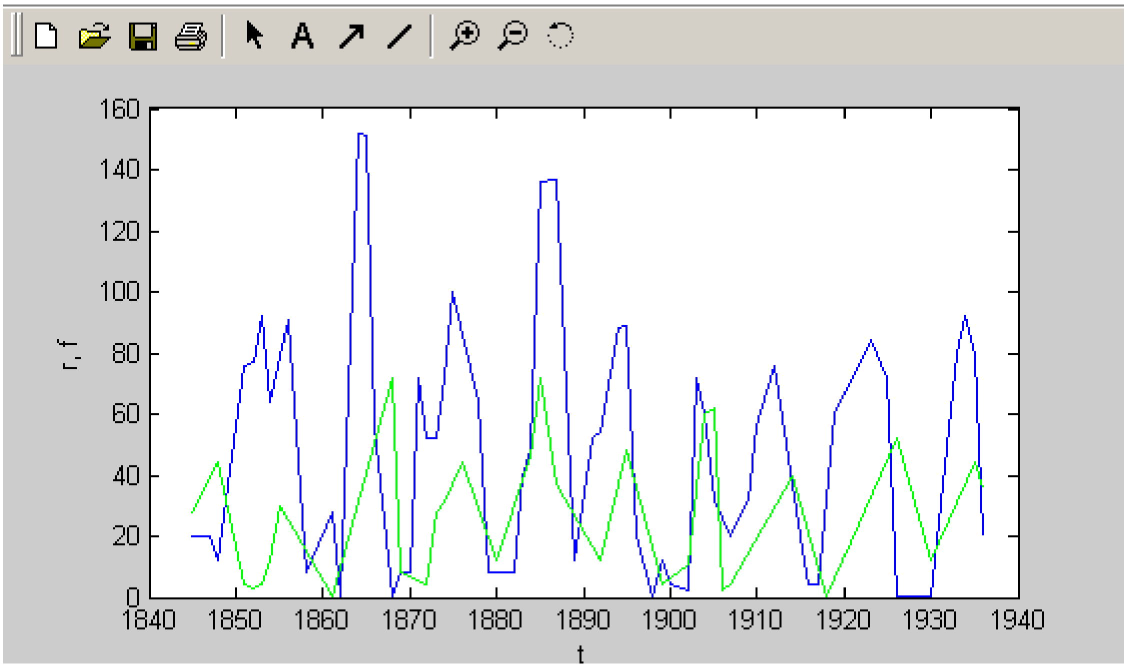

Рисунок 1. Динамика жертв (синий график) и хищников (зеленый график) в Канаде.

Попробуем что-то понять в этой картине с помощью простых рассуждений. Обсудим только главные характерные черты картины – колебания обоих популяций и отставание популяции хищников по фазе. Это отставание бывает большим или меньшим, но всегда популяция хищников растет после роста популяции жертв. Исключение наблюдается только вблизи 1885 года.

Рассуждаем. Крупному хищнику нужно достичь брачного возраста, накопить много энергии, только тогда он начнет интенсивно размножаться. Такие условия хищнику предоставляет большая популяция жертв. Увеличение популяции хищников приводит к интенсивному истреблению жертв. Но тогда наступает ухудшение условий питания хищников и замедление их размножения. Вспомним, что дело происходит в охотничьих угодьях. У каждого хищника есть заметная вероятность превратиться в меховой товар. В результате популяция хищников уменьшается. Но тогда наступает более благополучная жизнь у жертв. Они могут более интенсивно питаться и размножаться.

Таким образом, мы поняли, почему происходят колебания двух популяций, поняли, почему хищники отстают по фазе в развитии своей популяции. Пожалуй, можно также понять, почему популяция хищников в пиках всегда меньше пиковой популяции жертв.

Теперь подумаем об источнике пищи для жертв. Они питаются растительной пищей, которой должно быть довольно много, ибо эта пища некалорийна. Если почему-то этот источник питания исчезнет, произойдет экологическая катастрофа. Жертвы перестанут размножаться, но тогда и хищники погибнут от голода.

Упростим себе задачу, и будем считать, что трава представляет собой возобновляемый ресурс. Пусть сегодня кролики съели всю траву на полянах, но Природа милостива. Идут дождики, светит Солнце, корни травы не повреждены. Завтра трава вырастет снова. Но ясно, что чем больше площадь полян, тем вольготней кушают и размножаются кролики.

А вот теперь попробуйте путем одних рассуждений предсказать, кому станет лучше, кроликам или хищникам, если хозяева этих угодий расчистят дополнительные площади для полян с травой. Думаю, что правильный ответ найдет лишь небольшая часть читателей.

На этот и подобные вопросы легче отвечать, формализовав наши представления. Составим систему дифференциальных уравнений, называемую моделью Вольтерра. Этот ученый впервые проанализировал события в системе Хищники-Жертвы. Ранее Лотка пришел к такой же системе дифференциальных уравнений, изучая события в ходе автокаталитических химических реакций. Поэтому в литературе за такой моделью утвердилось название модели Лотки-Вольтерра.

$$dR/dt = k_{rb}GR - k_{rd}RF, \qquad (1)$$

$$dF/dt = k_{fb}RF - k_{fd}F, \qquad (2)$$

где k_{rb} - коэффициент рождаемости кроликов (rabbits birth), k_{rd} - коэффициент смертности кроликов (rabbits death), k_{fb} - коэффициент рождаемости лис (foxes birth), k_{fd} - коэффициент смертности лис (foxes death) в результате деятельности охотников. Остальные обозначения были приведены выше.

Проанализируем систему уравнений (1-2). Только будем помнить, что нас интересует не сама по себе эта модель, а возможность на ее примере увидеть проявления Боровской пары **Ясность-Прогностичность**. Так вот, математически подготовленному человеку, как мы с вами, сразу видно, что в этой модели много ясности. Мы можем сразу получить кучу следствий аналитически, не прибегая к численному решению системы. Приступим.

Сразу видно, что система допускает стационарное решение, то есть при заданных материальных параметрах системы полностью определяются не меняющиеся со временем популяции R_0 и F_0. Приравниваем нулю производные в (1-2) и видим, что в стационарном случае система уравнений распадается на два независимых уравнения, из которых находим

$$F_0 = k_{rb}G/k_{rd}, \qquad (3)$$

$$R_0 = k_{fd}/k_{fb}. \qquad (4)$$

Может вызвать некоторое удивление, что лисья стационарная популяция определяется исключительно кроличьими параметрами, а кроличья – лисьими, куда неявно включена деятельность охотников. Это не последнее удивление из тех, что нас поджидают. Из (3) видно, что увеличение площади полян с травой приведет к увеличению стационарной популяции лис, а не популяции кроликов, как может ожидать неподготовленный человек. На стационарную же популяцию кроликов увеличение их пищевого ресурса никак не влияет.

Не поленимся проверить эти выводы численным расчетом. Обратимся к системе программирования MatLab, составим программу численного решения системы дифференциальных уравнений (1-2), снабдив ее материальными коэффициентами, начальными условиями и задав подходящий интервал времени интегрирования.

Привожу текст программы, откуда видны значения всех параметров модели. Пока параметры взяты с потолка, но вы можете убедиться в их реалистичности. Например, при $G = 1.2$ процента площади под травой и при $k_{rb} = 0.2$ за единицу времени и на одну тысячу кроликов их будет нарождаться 240. Мы, правда, не понимаем пока, какова у нас единица времени. Но 240 крольчат на тысячу взрослых особей не расходятся с нашими представлениями о том, как любят размножаться эти создания. Даже поговорка имеется на этот счет. С лисами тоже все прилично. При $k_{fb} = 0.07$ на тысячу лис с их обеспеченностью одной тысячью кроликов за ту же единицу времени будет появляться 70 лисят. Согласны, что соотношение приплодов разумно? За ту же единицу времени из тысячи лис охотники добудут 200 шкурок. Неплохая производительность охотничьего хозяйства.

При выбранных значениях параметров получим и введем в программу в качестве начальных условий $R_0 = 2.857$, $F_0 = 1.2$. В таком порядке в программе располагаются популяции в массиве X. Это двумерный массив, где столбец x(1) отражает динамику кроликов, а x(2) – лис.

Вот текст программы rfode и функции rffunc, к которой программа обращается.

```
%Rabbits and Foxes ( + Hunters as a cause of kfd)
global G krb krd kfb kfd
G = 1.2;
krb = 0.2;
krd = 0.2;
kfb = 0.07;
kfd = 0.2;
t0 = 0.0;
tmax = 150;
tspan = [t0 tmax];
x0 = [2.857; 1.2];
[t, X] = ode45('rffunc', tspan, x0);
plot(t, X)


function xdot = rffunc(t, x)
global G krb krd kfb kfd
omega = 1.0;
xdot = [krb*G.*x(1) - krd.*x(1).*x(2); ...
            kfb.*x(1).*x(2) - kfd.*x(2)];
```

Запусти м программу на счет и получим следующий графический результат.

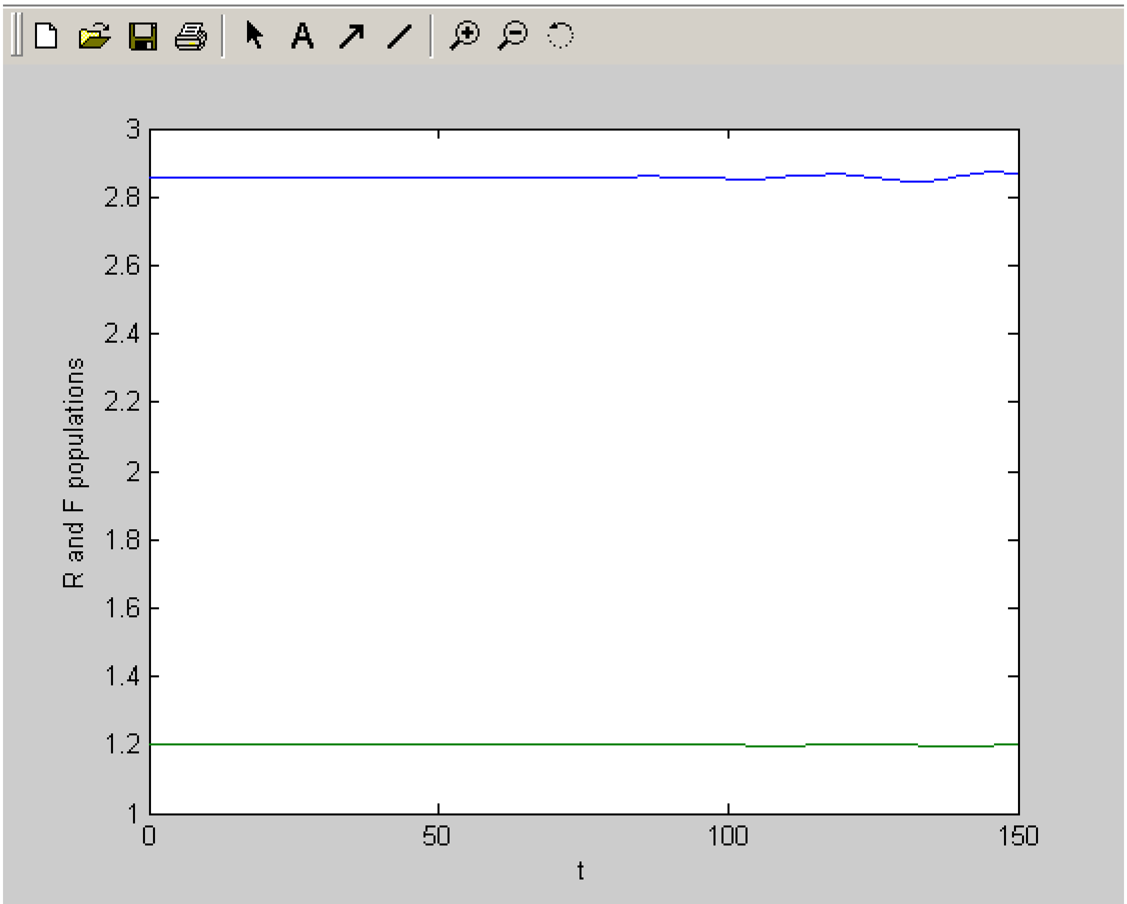

Рисунок 2. Стационарные популяции Кроликов (синий график) и Лис (зеленый график).

Мы видим, что численное интегрирование вполне подтвердило наш прогноз. В лесу тишь, гладь и полная благодать. Ни одна из популяций не меняется. Только косточки трещат у кроликов. Только лисы превращаются в ценные меха. Но это мелочи жизни. На то она и экономика, чтобы кто-то кого-то съедал. Зато экономика в этом частном случае прекрасно налажена. Конвейер, да и только. Никаких сбоев. Небольшие сбои наблюдаются у нас в расчете. Мы взяли довольно большое время интегрирования, поэтому успели накопиться погрешности счета, система готова выйти из стационарного состояния. Однако мы видим, что погрешности невелики, и мы не будем в дальнейшем обращать на них внимания.

Выведем систему из стационарного состояния, немного изменив начальные значения популяций. Положим теперь $R_0 = 2.6$, $F_0 = 1.2$. Получим такой ожидаемый результат, где наблюдаются небольшие колебания вокруг стационарных значений популяций.

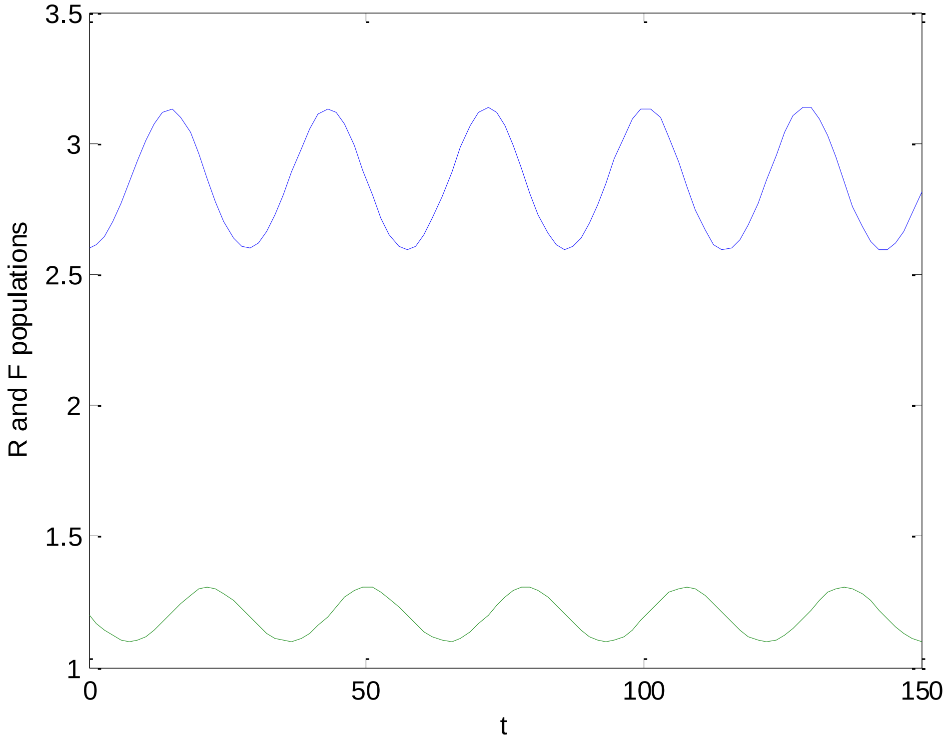

Рисунок 3. Малые колебания вокруг стационарных популяций Кроликов (синий график) и Лис (зеленый график).

Анализ (1 и 2) показывает, что при малых отклонениях от стационарного состояния модель является линейной. В ней возникают гармонические колебания популяций с уже понятным нам сдвигом фаз. Как выполняется такой анализ, можно прочесть в учебнике М.В. Волькенштейн. Биофизика, М., Наука, Физматлит, 1988, с. 496. Мы не будем повторять имеющийся там вывод следующих формул. Но отметим, как много ясности содержится для нас в модели (1 и 2), раз мы можем автоматически получить такое количество следствий. Вот эти следствия из линейности модели.

Модель предсказывает нам, что период малых колебаний

$T = 2\pi\ (k_{rb} G\ k_{fd})^{-1/2}$.

При наших значениях параметров модель нам дает теоретическое значение $T_т = 28.68$ принятых в модели единиц времени. В расчете мы находим $T_р = 29$.

Для отношения амплитуд малых колебаний популяций кроликов и лис модель предсказывает выражение и значение

$(k_{rd}/ k_{fb})\ (k_{rb} G / k_{fd})^{1/2} = 3.13$. В расчете мы получили 3.1298.

Резюмируем эту часть осмотра свойств нашей модели. Она явно обладает большой ясностью, поскольку позволяет нам детально видеть взаимодействия частей модели и даже анализировать всякие следствия. Теперь сосредоточимся на прогностических возможностях модели.

Сравнение рисунков 2 и 3 с рисунком 1 убеждает нас, что реальная экологическая система находится очень далеко от стационарного состояния, следовательно, она заметно нелинейная. Поэтому не будем мучиться и предадимся дальше численным расчетам, а не попыткам выводить аналитические формулы. Зададимся начальными популяциями R_0 = 1.0, F_0 = 1.0 и посмотрим, какой прогноз поведения системы выдаст наша программа.

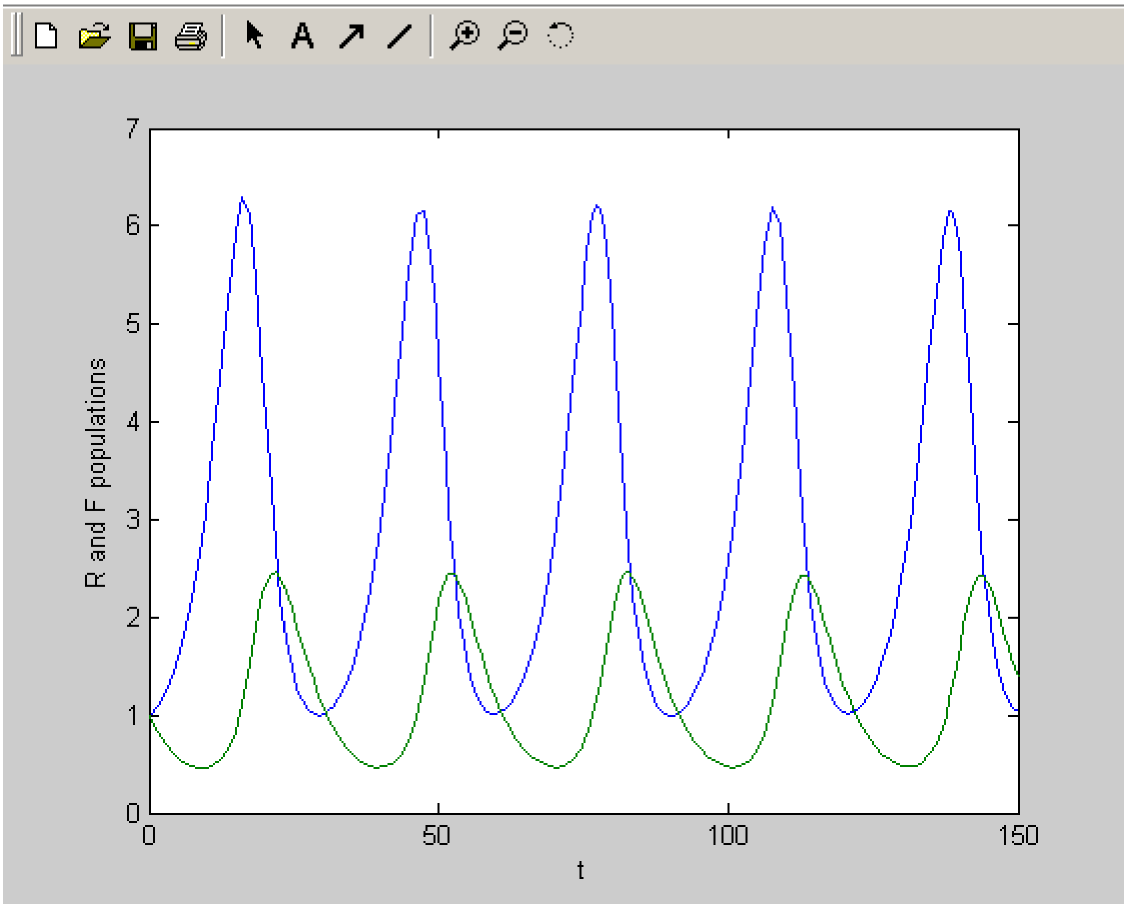

Рисунок 4. Нелинейные колебания при большом удалении модели от стационарного состояния.

Модель не стала сложнее. Изменился характер колебаний, но нам по-прежнему ясно, как управлять моделью. Если у вас есть MatLab, попробуйте изменить параметр *G*. Вы почувствуете, что теперь она ведет себя вполне понятным способом. В частности, при увеличении *G* популяция кроликов начинает колебаться опасным для нее образом. В минимумах она становится очень низкой, а время существования популяции на низком уровне сильно затягивается. Ясно, что кроликам приходится худо, поскольку любая случайность в эту часть периода колебаний может погубить малую популяцию. Например, эпизоотия.

Теперь поведение модели вчерне напоминает то, что изображено на рисунке 1. Но только вчерне. Мне как-то повезло поговорить с директором заповедника в Хатны-Мансийском национальном округе. Он всё понял в работе этой программы, одобрил учебную направленность модели. Однако коммерческую ценность программы оценил, как нулевую. Слишком слаба прогностическая способность заложенной в программу модели. Про такой характер колебаний популяций, как на рисунке 4, охотоведы и без нас знают. Они и так хорошо понимают, что и как происходит в их реальных системах. А наша модель слишком бедна по сравнению с реальностью, чтобы помочь специалистам решить какие-то сложные проблемы, когда они возникают. В частности, в нашу модель совершенно не заложены случайные события, а в реальной действительности они происходят одно за другим. Засуха, эпизоотии и многое другое. Кроме того, у нас в модели очень мало действующих лиц. Настолько мало, что модель очень слабо напоминает реальную действительность.

Попробуем напрячься и так усовершенствовать модель, чтобы она стала более прогностичной. Мы уже наметили два пути совершенствования модели. Сначала попытаемся промоделировать случайности и посмотрим, приблизится ли динамика модели к реалистической динамике рассматриваемых популяций. Затем попробуем расширить список действующих лиц.

Все случайности нам не отразить, но с одной мы справимся. Введем небольшие колебания в значения параметра *G*. Это промоделирует чередование засушливых и дождливых сезонов. Введем для этого некоторые изменения в функцию rffunc.

```
function xdot = rffunc(t, x)
global G krb krd kfb kfd
a = 0.5;
omega = 1.0;
xdot = [krb*(G + a*sin(omega.*t)).*x(1) - krd.*x(1).*x(2); ...
        kfb.*x(1).*x(2) - kfd.*x(2)];
```

Параметр *a* это амплитуда, omega – частота колебаний площади, занятой травой. Теперь программа предсказывает такое поведение популяций.

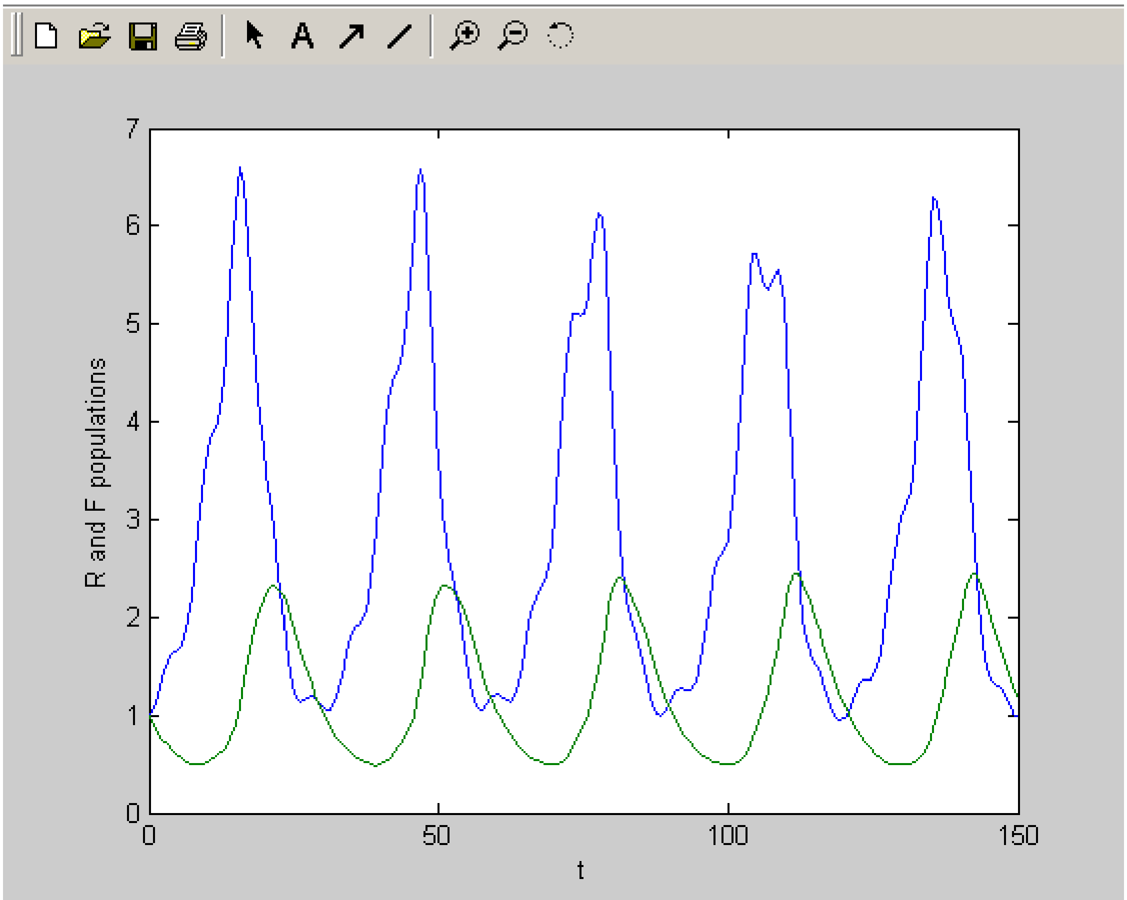

Рисунок 5. Нелинейные колебания при большом удалении модели от стационарного состояния и при псевдослучайном изменении площади, занятой травой

Модель явно улучшилась. Теперь рост и падение популяции кроликов уже не происходит по гладким экспонентам. Один пик у нас даже получился зубчатым, как на рисунке 1. Но нет главного. Мы не получили случайного сдвига фаз, который наблюдается на рисунке 1, а также заметного изменения со временем амплитуд колебаний.

Придется вводить новых действующих лиц. Учтем, что лисы с аппетитом едят мышей (Mice), популяция которых M в лесу обычно очень велика. Подумайте и скажите себе, как изменится поведение модели, если мы введем в нее популяцию мышей. Наверное, вы себе ясно представляете, что с появлением в лесу мышей лисы начнут питаться лучше и станут давать охотникам больше шкурок. Ясно ли вы себе представляете, как появление мышей скажется на кроликах?

Проверим, насколько это вам ясно, усложнив систему уравнений. У нас появится новое уравнение

$dM/dt = k_{\mathrm{mb}}GM - k_{\mathrm{md}}FM.$

Здесь учтено, что мыши питаются семенами трав, а потому скорость прироста их популяции зависит от параметра G. Далее, в уравнении для популяции лис введем сумму $R + M$ как лисий пищевой ресурс. Получится такое уравнение

$dF/dt = k_{\mathrm{fb}}(R + M) F - k_{\mathrm{fd}}F.$

Оформим усложнение модели в виде новой программы rfmode и функции rfmfunc.

```
%Rabbits, Foxes and Mice
global G krb krd kfb kfd kmb kmd
G = 1.2;
krb = 0.2;
krd = 0.2;
kfb = 0.07;
kfd = 0.2;
kmb = 0.3;
kmd = 0.2;
t0 = 0.0;
tmax = 150;
tspan = [t0 tmax];
x0 = [1; 1; 6];
[t, X] = ode45('rfmfunc', tspan, x0);
plot(t, X)
xlabel('t')
ylabel('R, F and M populations')
```

```
function xdot = rfmfunc(t, x)
global G krb krd kfb kfd kmb kmd
xdot = [krb*G .*x(1) – krd .*x(1) .*x(2); ...
            kfb .*(x(1) + x(3)) .*x(2) – kfd .*x(2); ...
```

kmb*G .*x(3) – kmd .*x(2) .*x(3)];

Мы не стали здесь учитывать колебания параметра G, чтобы прочувствовать влияние только одного нового фактора. Включение в модель нескольких новых факторов грозит сильным ухудшением ясности. Вот какой прогноз дает измененная модель.

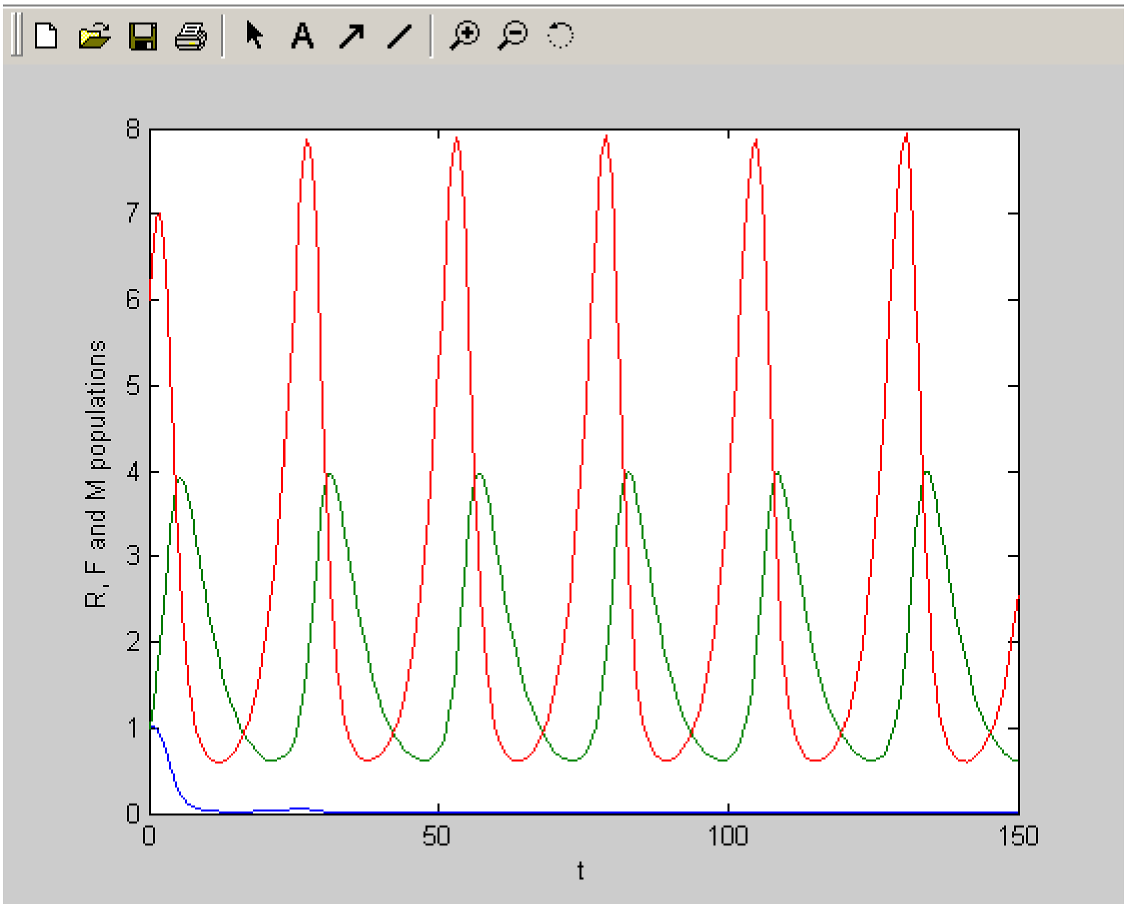

Рисунок 6. Динамика системы популяций Кроликов (синий график), Лис (зеленый график) и Мышей (красный график).

Мы видим, что предсказательная мощь модели заметно увеличилась. Мы в расчете получили следствие, до которого вряд ли кто-то, не будучи специалистом, мог бы додуматься голыми мозгами. Появление в лесу полчищ мышей подкрепило популяцию лис, и те съели начисто всех кроликов. Усиление прогностических качеств модели радует. А как с ясностью?

Попытаемся спасти популяцию кроликов. Для этого надо ввести еще одно действующее лицо. Это сова (Owl), которая способна за ночь съесть несколько мышей.

Динамику популяции сов O опишем уравнением

$dO/dt = k_{ob}MO - k_{od}FO$.

Здесь учтено, что кто-то уничтожает и сов (ястребы?).

Уравнение для популяции мышей приобретет такой вид

$dM/dt = k_{mb}GM - \mathrm{kmd}(F + O)\mathrm{M}$.

Новая программа rfmoode и соответствующая ей функции rfmofuncвыглядят так.

```
%Rabbits, Foxes, Mice and Owls
global G krb krd kfb kfd kmb kmd kob kod
G = 1.2;
krb = 0.2;
krd = 0.2;
kfb = 0.07;
kfd = 0.2;
kmb = 0.3;
kmd = 0.2;
kob = 0.05;
kod = 0.1;
t0 = 0.0;
tmax = 350;
tspan = [t0 tmax];
x0 = [1; 1; 6; 2];
[t, X] = ode45('rfmofunc', tspan, x0);
plot(t, X)
xlabel('t')
ylabel('R, F, M and O populations')
% plot(t,[X(:,1), X(:,2)])

function xdot = rfmofunc(t, x)
global G krb krd kfb kfd kmb kmd kob kod
a = 0.5;
omega = 1.0;
xdot = [krb*(G + a*sin(omega.*t)).*x(1) - krd.*x(1).*x(2); ...
        kfb.*(x(1) + x(3)).*x(2) - kfd.*x(2); ...
        kmb*(G + a*sin(omega.*t)).*x(3) - kmd.*(x(2) + x(4)).*x(3); ...
        kob.*x(3).*x(4) - kod.*x(4)];
```

Здесь мы учли все доступные нам факторы, включая случайные. Получаем прогноз поведения системы.

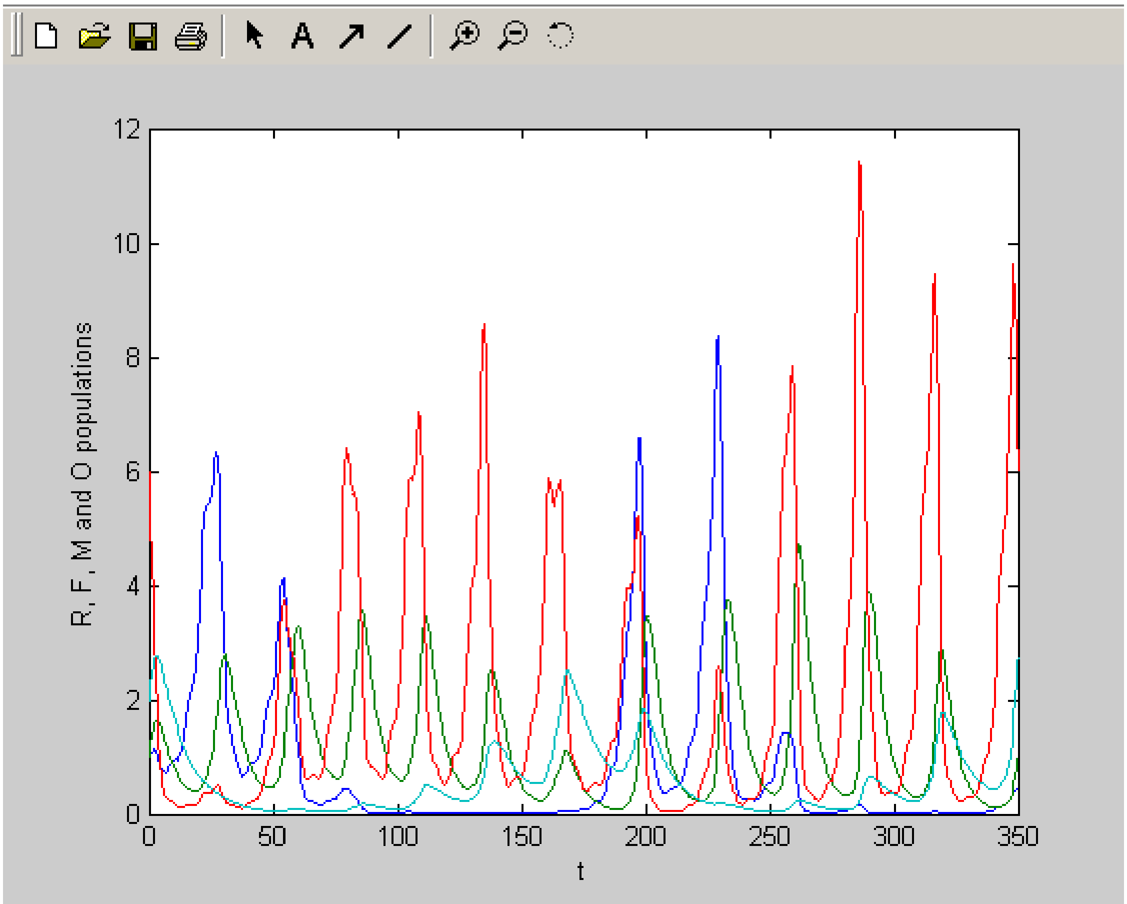

Рисунок 7. Динамика системы популяций Кроликов (синий график), Лис (зеленый график), Мышей (красный график) и Сов (циановый график). Урожайность травы в лесу подвержена колебаниям.

Прогнозируема картина поведения экологической системы теперь весьма сложна. Поэтому выделим из нее графики популяций лис и кроликов. Получим более прозрачную картину.

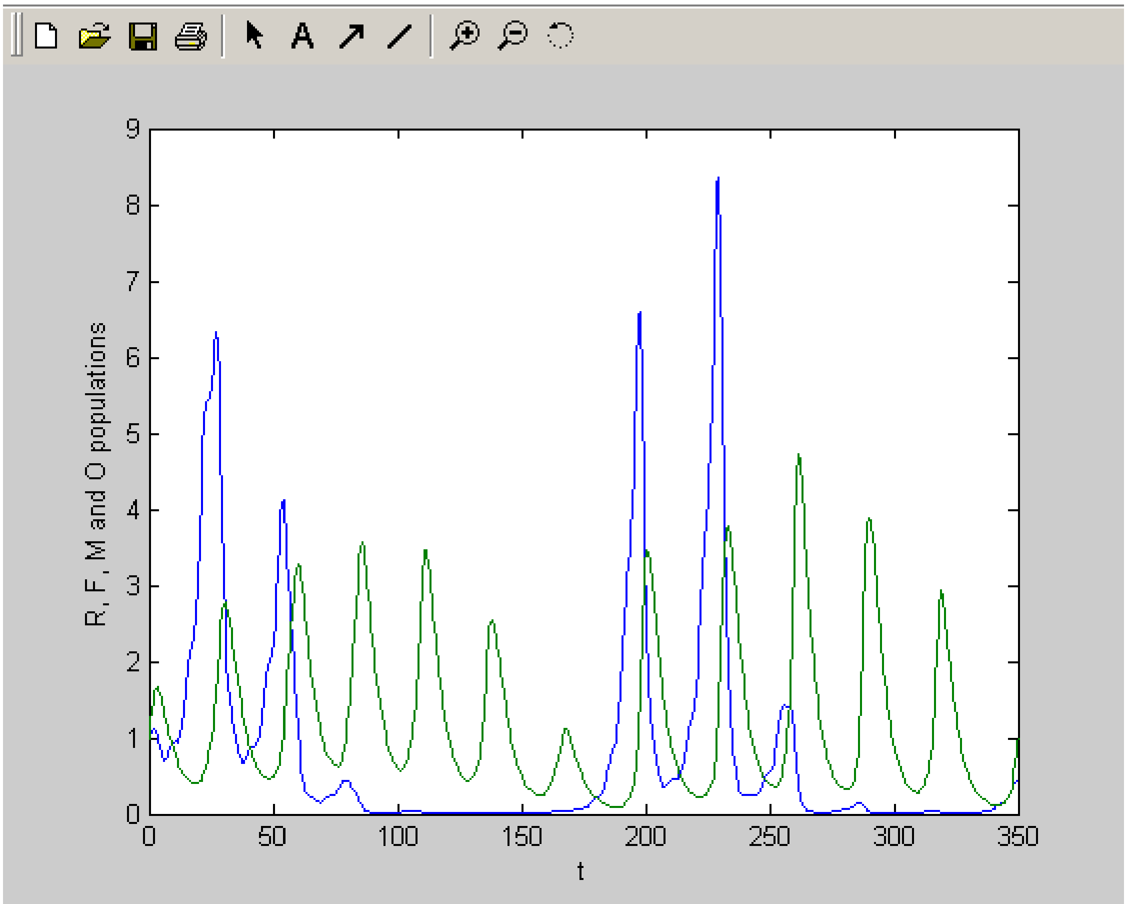

Рисунок 8. Динамика системы популяций Кроликов (синий график), Лис (зеленый график) в системе, где действуют еще и невидимки - Мыши и Совы, дожди и засухи.

Сравните с рисунком 1. Конечно, мы не можем ожидать количественного совпадения. Но качественные особенности реальной системы прекрасно воспроизводятся. В этом смысле мы можем говорить о возросшей точности нашего прогноза поведения сложной системы. Теперь нам становится понятно, что на рисунке 1 не отражены многие факторы, влияющие на динамику системы. Там тоже есть какие-то невидимки. Понятно также, что эти невидимки не так влиятельны, как в нашей модели. Так что хвост мы с трудом вытащили. А как с ясностью? Ясно ли вам, за какие ниточки надо подергать нашу модель, чтобы деятельность наших невидимок ощущалась, но не была такой яростной? Попробуйте поиграть с последней программой. Уверен, что вы убедитесь – нос увяз окончательно. Боровская пара **истинность-ясность** работает безукоризненно. И вполне количественно.

Кстати, на этом конкретном примере борьбы с собственной моделью мы можем отчетливо понять механизм потери ясности. В погоне за точностью прогноза мы усложняем модель, вводим в нее новых действующих лиц и сложные связи между ними. При этом мы теряем возможность прослеживать эти связи, не прибегая к дополнительному анализу самой модели. Сложная модель, хорошо воспроизводящая реальную действительность, требует не менее внимательного анализа, чем сама действительность, если мы хотим понять, с чем связаны конкретные проявления модели или реальной системы. Наблюдатель, желающий проинтерпретировать результаты своих наблюдений, создает модель и тем самым в своем сознании становится сам частью наблюдаемой системы.

Вот Бор и считал, что открытый им принцип есть следствие невозможности полностью отделить наблюдателя от наблюдаемого им сложного явления. В квантовой физике это проявляется очень ярко – там процесс измерения с помощью макроскопического прибора всегда влияет на измеряемые характеристики микроскопического объекта. Заслуга Бора состоит в догадке, что такая же закономерность проявляется в любых исследованиях Природы.

В качестве заключения этой лекции хочу обратить ваше внимание на тот факт, что мы получили модели и программу для вполне глубокого качественного анализа поведения весьма сложной динамической системы. Грех было бы не попытаться употребить изложенную здесь методику анализа с какой-нибудь заметной пользой для кого-нибудь. Однако углубляться в охотоведческие проблемы я не решаюсь, не располагая необходимыми для этого специальными знаниями. Предлагаю искать пользу на таких путях, которые давно проложила физика, пользующаяся методом динамических аналогий. Метод состоит в том, чтобы теорию из одной предметной области почти без изменений перенести в другую область, когда события в двух областях описываются похожими системами дифференциальных уравнений.

Внимание! На этом пути принцип дополнительности Бора способен подсказать нам еще и совершенно новую идею, которая в научной литературе, как мне кажется, не обсуждалась. Если повезет, если не запутаемся, мы с вами сейчас сделаем серьезное открытие. Мы откроем новый взгляд на междисциплинарные исследования.

Роль междисциплинарных исследований в науке всем хорошо известна. На стыках физики и химии (химфизика и физхимия), химии и геологии (геохимия), физики, химии и биологии (биофизика и биохимия) возникают прорывные направления развития научной мысли и получаются самые ценные для естествознания результаты. Но обращаю ваше внимание на то, что во всех этих известных случаях объект исследования одинаково близок двум стыкующимся дисциплинам. Различен только инструментарий. Рыбак рыбака видят вблизи и договариваются совместно поудить рыбку в одном и том же пруду. Бесконфликтно. Пусть и различными удочками. Но взгляд у одного и другого на добычу будет один и тот же.

Я уверен, что в будущем наука воспользуется иными возможностям спаривания дисциплин. Уже заготовлена методология такого спаривания. Она содержится в принципе дополнительности Бора и в им же полученном следствии:

«**Мы должны вообще быть готовы к тому, что всестороннее освещение одного и того же предмета может потребовать различных точек зрения, препятствующих однозначному описанию. Строго говоря, глубокий анализ любого понятия и его непосредственное применение взаимно исключают друг друга**». Н. Бор. Избранные труды. М., 1971. Т. 2, стр. 58.

Всестороннее освещение одного и того же сложного предмета, следовательно, не может быть бесконфликтным, как учат нас уже описанные Боровские пары. Зато такое конфликтное освещение в наших суждениях, теориях делает его куда более содержательным. Вот я и предлагаю для изучения сложных объектов Природы организовать такую междисциплинарность, когда спариваться будут очень далекие друг от друга дисциплины. Тогда будет автоматически обеспечены очень различные точки зрения на изучаемые объекты. Проиллюстрировать свое предложение я собираюсь достижениями из таких несуществующих пока наук, как **политическая экология** и **историческая экология**. Однако я не хочу перегружать эту лекцию. Заинтересованных читателей я приглашаю посетить специальную короткую страничку, где пытаюсь воспользоваться методом динамических аналогий при решении качественных вопросов, находящихся в компетенции этих гипотетических наук.